

Применение свойств функций для решения уравнений и неравенств

Область определения функции

Решите уравнение $\sqrt[4]{x(x-3)} + \sqrt[3]{x^4(x-3)} \cdot (x+3) + \sqrt{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+4)(x+8)} = 2$

Монотонность

Решите: 1. $2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15$

2. $\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{5x+2} = 7$

3. $3\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{3x-2} + 5\sqrt{x+3} = 0$

4. $2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{3-x} + 4$

5. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{5-4x} = 1 - \sqrt{x+5}$

6. $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$

7. $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 9$

8. $\sqrt{x^3+17} = 3x-5 + \sqrt{x^3+8}$

9. $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = x^2 - x + 2$

10. $4\sqrt{x^2-24} + 3\sqrt{x^2-21} + 2\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-9} = \frac{20}{x-4}$

11. $\sqrt{3x^2-18x+25} + \sqrt{4x^2-24x+29} = 6x - x^2 - 4$

12. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$

13. $3^x + 4^x = 5^2$

$3^x + 4^x = 5^x$

$3^x + 4^x + 5^x = 6^x$

$3 \cdot 5^{2x+1} - 7 \cdot 2^{4x+1} = 19$

14. $x \cdot 3^{x+1} = 5x + 4$

15. $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + x = \frac{24}{5}$

16. $(x+1)2^x = 3x+1$

16. $2 \cdot 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 14$

$2 \cdot 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 14 - x$

$2 \cdot 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 14 - x^{2011}$

17. $\log_2(x-3) = x-1$

18. $3\arcsin x + \pi x - \pi = 0$

19. $(x+1)(2 + \sqrt{(x+1)^2+3}) - 3x \cdot (\sqrt{9x^2+3}) = 0$

20. $(x^2+x-2)^3 + x^2 - 2 = x^3$

21. $\begin{cases} x + \sin x = y + \sin y \\ x^2 + 3xy + y^2 = 1 \end{cases}$

22. $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+2}} = 15x+11$

23. а) $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 2$

б) $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 2$

в) $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt[6]{x-1} = 2$

Четность, нечетность

1. Решите уравнения: 1) $x^4 - 2x^2 + 2|x^2 - 1| + 1 = 4x^2 + 4|x|$

2. При каких значениях параметра a уравнение $a \cos x - 7|x| = 3 + 6^x + 6^{-x}$ имеет нечетное число корней?

Ограниченность

1. $2^{x^2} + 5^{x^4} = 2 - \operatorname{tg}^2 x$ 2. $3^{x^2+1} + 5^{x^4} = 4 - \sin^2 x$ 3. $4^{x^2+2} + 7^{x^4} = 16 + \cos^2 x$

4. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} - x^2 = 5 + 2x$ 5. $\frac{2^{x+3}}{4^x + 16} = x^2 - 4x + 5$ 6. $2^{|x|} - \cos y + \lg(x^2 + |y|) = 0$

7. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right)}$ 8. (Вып. Экз. 11МК, 2002, №6) $\sqrt{x-2} + \sqrt{20-x} = \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$.

9. $6 \sin x = |x-1| + |x+5|$ 10. $25 \cdot 3^{|x-3|+|x-5|} + 9 \cdot 5^{|x-4|+|x-6|} = 450$

11. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a x = |x-1| + |x+5|$ имеет единственный корень?

12. $(x^2 + 4x + 17)^2 - (x^2 - x + 1)^2 = 12$ 13. $3^{\sin x} = \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{\pi}}(x+y) - 6 \log_{\sqrt[3]{\pi}}(x+y) + 12}$

14. $(x^2 - 4x + 3) \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\cos^2 \pi x + \cos \pi x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \geq 2$

15. а) $\log_2^2(x+y) - 2 \cos \frac{\pi xy}{2} \cdot \log_2(x+y) + 1 + |y-2| = 0$

б) $x^2 + 2x \cdot \sin y + 1 = 0$ в) $\cos^2 x + \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} = 0$

г) $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cdot \cos y + 2^{|y|} = 0$ д) $\sin x \cdot (\cos 2x + \cos 6x) \cos^2 x = 2$

16. а) $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}} = \sqrt{4x-x^2}$ б) $\log_{\frac{1}{3}} \left(y^2 - 2y + \frac{10}{9} \right) = \frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy}$ в) $2^{x-3} + 2^{3-x} = -x^2 + 6x - 7$

г) $\log_2(x^2 + 2x - x^2) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{4}$ д) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} = 4 - \log_2^3(x^4 + x^2 + 1)$

е) $\log_2 \left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y} \right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}$ ж) $2^{\operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{4}{\log_2(x^2 - 4x + 3)}$

17. $\frac{|3x-4| + x^2 - 12|x| + 36}{x-5} = |x-2|$

18. $3 \sin 5x + \sqrt{2} \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{20} \right) = 3 \cos 5x - 3\sqrt{2}$ 19. $8|\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x| = \cos 18x + 12 \cos 9x + 27$ МГУ

20. (МГУ) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left| \frac{a-2}{x+a} \right|$

имеет ровно два различных корня на отрезке $[-4; 0]$.

21. Найдите все значения параметра a из интервала $(0; 5]$, при каждом из которых существует хотя бы одно число из отрезка $[0; 3]$, удовлетворяющее уравнению $3 - |\sin ax| = 2^{\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)}$.