

Факториал

(или, а умеем ли мы умножать?)

1. Упростите выражение: а) $\frac{(k+2)! \cdot n! \cdot (k+1)!}{(k+4)! \cdot 4! \cdot (k+3)! \cdot 3! \cdot (k+2)!}$ б) $\frac{2(k+2)! - 5(k+1)! - 2n!}{n! - (k-1)!}$
2. Найдите НОД и НОК чисел $2012!$ и $2010! + 2011!$
3. Найдите наименьшее натуральное n , такое, что $n!$ делится на 990.
4. Сколькими нулями оканчивается число $100!$?
5. Что больше: $101!$ или 51^{101}
6. Докажите, что существуют 2012 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа.
7. (МГУ, ВМК, 2002) Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$
8. (В-А олимп, 2007) Упростите $\frac{1}{1! \cdot (k+2)!} + \frac{1}{2! \cdot (k+2)!} + \frac{1}{3! \cdot (k+2)!} + \dots + \frac{1}{2006! \cdot (k+2)!}$
9. (МГУ, ВМК, 2002) Найдите сумму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(k+1)!}$
10. Докажите неравенство: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2$
11. Найдите все натуральные n , такие, что число $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ точным квадратом.
12. Рассмотрим произведение ста сомножителей: $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100!$ Можно ли выбросить один из этих сомножителей, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом?

Определение: Двойной факториал $n!!$ - произведение всех натуральных чисел от 1 до n , имеющих ту же четность, что и n .

$$k!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k$$

$$(k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k+1)$$

13. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число

$$(k+1)! \cdot (k+2)! \cdot (k+3)! \cdot \dots \cdot (n)!$$