

А умеем ли мы складывать?

1. Упростите выражение $2^2 - 5^2 + 6^2 - 9^2 + \dots + (n+6)^2 - (n+9)^2$
2. Упростите выражение $1^2 - 4^2 + 5^2 - 8^2 + \dots + (n-7)^2 - (n-4)^2$
3. Найдите сумму $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2$.
4. Упростите выражение $2 + 10 + 50 + \dots + 2 \cdot 5^{n-2}$
5. Найдите сумму $6 + 66 + 666 + 6666 + \dots + \underbrace{66\dots6}_n$
n штук
6. Вычислите $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2009}} + \frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2011}}$
7. Упростите $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.
8. Упростите $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{(n-3) \cdot (n+2)}$.
9. Вычислите $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{45 \cdot 49} + \frac{1}{47 \cdot 51}$.
10. Докажите неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$
11. Упростите $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$
12. Докажите, что $\frac{1}{2} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200} < 1$
13. Докажите, что $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} < 1$
14. (МГУ, ВМК, 2001) Докажите, что $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200}$
15. Упростите $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$
16. Найдите сумму $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$
17. (Олимп. УПИ, 2002) Найдите сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (n-1)$
18. Вычислите $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^n} + \dots$
19. (МГУ, ВМК, 1982) Вычислите $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$
20. Упростите выражение: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

21. Упростите выражение: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

22. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2012^2} < \frac{2011}{2012}$

23. Докажите, что $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$

24. В 1746 году великий российский математик Леонард Эйлер опубликовал одно из своих важнейших произведений – «Введение в анализ бесконечных». В этом труде, в

частности, Эйлер находит значения двух бесконечных сумм $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ и

$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ (слагаемыми в первой сумме являются числа, обратные квадратам

натуральных чисел, а во второй – обратные квадратам нечетных чисел) Значение первой

суммы, как показал Эйлер, равно $\frac{\pi^2}{6}$. Учитывая этот результат, найдите значение

второй суммы.

25. Докажите, что $\forall n \in N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

26. Докажите, что $\forall n \in N, n \geq 2$ выполняется неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{4n} > \frac{13}{12}$

27. (Олимп. УПИ, 2004) Решите уравнение $\frac{\lg x^2}{(\lg x)^2} + \frac{\lg x^3}{(\lg x)^3} + \frac{\lg x^4}{(\lg x)^4} + \dots + \frac{\lg x^n}{(\lg x)^n} + \dots = 8$

28. Найдите сумму $\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x}$

29. Упростите выражение $\sin 11^\circ + \sin 51^\circ + \sin 91^\circ + \dots + \sin 331^\circ$

30. Упростите выражение $\cos 44^\circ + \cos 84^\circ + \cos 124^\circ + \dots + \cos 324^\circ$

31. Упростите выражение $\cos \frac{2\pi}{30} + \cos \frac{4\pi}{30} + \cos \frac{6\pi}{30} + \dots + \cos \frac{58\pi}{30}$