Проблемный модуль по теме: «Показательные уравнения и неравенства»

Учитель высшей категории

лицея № 130 Щёлкова С.Г.

Блок актуализации

Обобщение понятия степени. Показательная функция: степень с иррациональным показателем, свойства показательной функции. Решение показательных уравнений и неравенств.

Экспериментальный блок.

Графический способ решения трансцендентных уравнений.

Проблемный блок

Простейшие виды показательных уравнений и неравенств, решение задач.

Блок обобщения

«Древо» проблемного модуля «Показательные уравнения и неравенства»

Теоретический блок

Показательная функция и её свойства. Показательные уравнения. Показательные неравенства.

Блок применения

Решении показательных уравнений и неравенств

Блок ошибок

Ошибки при применении свойств степени, определении знака при решении неравенств.

Блок углубления

Производная показательной функции.

1. **Блок актуализации**

Дидактическая цель: повторить основные опорные понятия и способы действия, необходимые для усвоения нового учебного материала.

Общее понятие степени.

1) Корень n-й степени и его свойства.

Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a. Арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0)$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} (k > 0)$
4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} (k > 0)$
5. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k (если\ k \leq 0, то\ a \neq 0)$
6. Для любых чисел a и b, таких, что $0 \leq a < b$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

2) Иррациональные уравнения. Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными.

Степень с рациональным показателем. Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая a=0 при n≤0. Напомним свойства таких степеней.

Для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n справедливы равенства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$;

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0)$;

$a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

Если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

Определение: Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное $(n > 1)$, называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных a и b справедливы равенства:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r \div a^s = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
6. Пусть r – рациональное число и $0 < a < b$. Тогда

$a^r < b^r\ при\ r > 0$,

$a^r > b^r\ при\ r < 0$.

7. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что

$a^r > a^s\ при\ a > 1$,

$a^r < a^s\ при\ 0 < a < 1$.

Показательная функция.

Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где a>0, a≠1), называется показательной функцией с основанием a.

Сформулируем основные свойства показательной функции:

1. Область определения – множество R действительных чисел.
2. Область значений – множество R_+ всех положительных действительных чисел.
3. При a>1 функция возрастает на всей числовой прямой; при 0<a<1 функция убывает на множестве R.
4. При любых действительных значениях x и y справедливы равенства

$a^x a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

$(ab)^x = a^x b^x$; $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$.

Эти формулы называют основными свойствами степеней.

Решение показательных уравнений и неравенств.

1 Уравнения. Рассмотрим простейшее показательное уравнение $a^x=b$, где $a>0$ и $a\neq1$. Область значений функции $y=a^x$ – множество положительных чисел. Поэтому в случае $b<0$ или $b=0$ уравнение не имеет решений.

Пусть $b>0$. Функция $y=a^x$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ возрастает при $a>1$ (убывает при $0<a<1$) и принимает все положительные значения. Применяя теорему о корне (пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение f(x)=a имеет единственный корень в промежутке I), получаем , что уравнение при любом положительном a, отличном от 1, и $b>0$ имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$. Очевидно, что c является решением уравнения $a^x = a^c$.

2 Неравенства и системы уравнений. Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве функции $y=a^x$: эта функция возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

2. Экспериментальный блок

Дидактическая цель: Показать преимущество графического способа решения трансцендентных уравнений.

Рассмотрим уравнения вида $a^{\varphi(x)} = f(x)$, где $\varphi(x)$ и $f(x)$ - алгебраические или трансцендентные функции. Уравнения такого типа не могут быть решены ни одним из рассмотренных приемов. Другими словами, с помощью алгебраических операций уравнения этого типа решить нельзя. Однако графическим способом нетрудно найти приближенные решения уравнений этого вида.

Рассмотрим пример. Решить уравнение: $2^{x-1} = x+1$.

Решение. Построим график функции: $y = 2^{x-1}$ и $y = x+1$.

а) $y = 2^{x-1}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

б) $y = x + 1$ при $x = 0$ $y = 1$, а при $x = -1$ $y = 0$.

На графике читаем абсциссы двух точек пересечения графиков. Один из корней находится в интервале $-1 < x < 0{,}5$. Можно считать, что $x_1 = -\frac{3}{4}$, а $x_2 = 3$. При найденных значениях абсцисс соответствующие ординаты равны между собой.

Для прямой: $y_1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

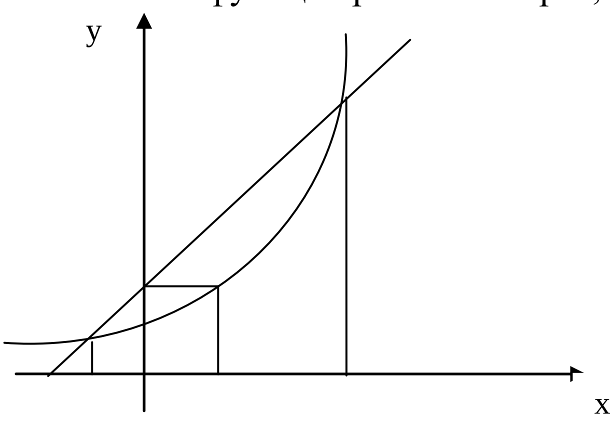
Для кривой: $y_1 = 2^{-\frac{3}{4}-1} = 2^{-1\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \approx 0{,}2969$.

Для прямой: $y_2 = 3 + 1 = 4$.

Для кривой: $y_2 = 2^{3-1} = 2^2 = 4$.

Графический метод очень удобен в качестве вспомогательного средства, применяемого при приближенном решении трансцендентных и других уравнений.

Знание графиков функций $y = a^{\varphi(x)}$ и $y = f(x)$ нередко позволяет определить число решений уравнения, как например в рассмотренном выше уравнении $2^{x-1} = x + 1$, в котором вследствие монотонности функций $y = 2^{x-1}$ и $y = x + 1$ других точек пересечения их графиков нет, так как показательная функция растет быстрее, чем линейная.



3. Проблемный блок

Дидактическая цель: дать учащимся представление о взаимосвязи методов решения показательных уравнений и неравенств с решением различных задач.

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показатели степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x=a^b$, где $a>0$, $a\neq1$, x – неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием $a>0$, $a\neq1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Рассмотрим несколько примеров:

- Уравнение вида $a^{f(x)} = 1$.

1) Решить уравнение. $3^{2Cos2x+1}=1$

Решение: $2Cos2x + 1 = 0$; $Cos2x = -\frac{1}{2}$;

$2x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, где $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$

2) Решить уравнение. $2^{x^2-5x+6} = 1$.

Решение: По определению нулевого показателя степени имеем:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

- Уравнение вида $a^x = a^\alpha$.

1) Решить уравнение. $3^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}$.

Решение: Так как $\sqrt[7]{9} = 3^{\frac{2}{7}}$, то $x^2 - \frac{5}{7}x = \frac{2}{7}$ и $7x^2 - 5x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -\frac{2}{7}$ и $x_2 = 1$.

2) Решить уравнение. $\sqrt{2^{x^2-2x-10}} = \sqrt{33 + \sqrt{128}} - 1$.

Решение: Преобразуем правую часть:

$$\sqrt{33+\sqrt{128}}-1=\sqrt{33+2\sqrt{32}}-1=\sqrt{32+2\sqrt{32}+1}-1=\sqrt{\left(\sqrt{32}+1\right)^2}-1=\sqrt{32}=2^{\frac{5}{2}}$$

.

Уравнение примет вид:

$2^{\frac{x^2-2x-10}{2}}=2^{\frac{5}{2}}; x^2-2x-10=5; x^2-2x-15=0; x_1=-3; x_2=5.$

- Уравнение вида $a^x=b$.

1) Решить уравнение. $3^{2x-1}=5^{3-x}$.

Решение: $(2x-1)\lg 3=(3-x)\lg 5$; $2x\lg 3+x\lg 5=3\lg 5+\lg 3$; $x(2\lg 3+\lg 5)=3\lg 5+\lg 3$; $x=\frac{3\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+\lg 5}$.

2) Решить уравнение. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt[4]{3^{3x-4}}}{2}$.

Решим это уравнение двумя способами:

а)$(x-1)(\lg 3-2\lg 2)+\frac{1}{2}(2\lg 2-\lg 3)=-\lg 2+\frac{3x-4}{4}\lg 3$;

$x(\lg 3-2\lg 2)-\lg 3+2\lg 2+\lg 2-\frac{1}{2}\lg 3=-\lg 2+\frac{3}{4}x\lg 3-\lg 3$;

$x\left(\lg 3-2\lg 2-\frac{3}{4}\lg 3\right)=\frac{1}{2}\lg 3-4\lg 2$; $x\left(\frac{1}{4}\lg 3-2\lg 2\right)=2\left(\frac{1}{4}\lg 3-2\lg 2\right)$, откуда $x=2$.

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{3}{4}x}\cdot\frac{1}{3}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{4^2}{\sqrt{3}}=\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^x$; $\left(\frac{3}{4}\div 3^{\frac{3}{4}}\right)^x=\frac{\sqrt{3}}{4^2}$; $\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{4}\right)^x=\frac{\sqrt{3}}{4^2}$; $\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{4}\right)^x=\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{4}\right)^2$; $x=2$.

- Уравнение вида $A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}+A_2a^{mx+k_2}+\dots+A_na^{mx+k_n}=M$.

1) Решить уравнение $2^{3\sqrt{x}}+3\cdot 2^{3\sqrt{x}-1}=20$.

Решение: $2^{3\sqrt{x}-1}(2+3)=20$; $2^{3\sqrt{x}-1}=4$; $2^{3\sqrt{x}-1}=2^2$; $3\sqrt{x}=3$; $\sqrt{x}=1$; $x=1$.

2) Решить уравнение

$$3^{2x-5}+3^{2x-7}+3^{2x-9}=45\frac{1}{2}+22\frac{3}{4}+11\frac{3}{8}+\cdots$$

Решение: Правая часть уравнения представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию; действительно,

$22\frac{3}{4}\div 45\frac{1}{2}=\frac{91}{4}\div\frac{91}{2}=\frac{1}{2}$; $11\frac{3}{8}\div 22\frac{3}{4}=\frac{91}{8}\div\frac{91}{4}=\frac{1}{2}$ т. е. знаменатель прогрессии $q=\frac{1}{2}$.

$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{45\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=91$. Данное уравнение примет вид:

$3^{2x-9}(3^4+3^2+1)=91$; $3^{2x-9}\cdot 91=91$, откуда $3^{2x-9}=1$; $2x=9$; $x=4{,}5$.

- Уравнение вида $A_0a^{2x}+A_1a^x+A_2=0$

1) Решить уравнение $2^x-2=15\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$.

Решение: $2^{\frac{x-3}{2}}=y$, откуда $2^{x-3}=y^2$ и $2^x=8y^2$, следовательно, данное уравнение примет вид: $8y^2-2=15y$,

или $8y^2-15y-2=0$, и $y_1=-\frac{1}{8}$; $y_2=2$.

а) $2^{\frac{x-3}{2}}=-\frac{1}{8}$. Это уравнение не имеет решений в области действительных чисел, так как показательная функция не может быть отрицательной.

б) $2^{\frac{x-3}{2}}=2$, откуда $\frac{x-3}{2}=1$ и $x=5$.

2) Решить уравнение $9\cdot 5^{2x-4}+4\cdot 5^{8-2x}=325$

Решение: $9\cdot 5^{2x-4}+\frac{4\cdot 5^4}{5^{2x-4}}=13\cdot 25$.

Введем обозначение: $5^{2x-4}=y$, после чего уравнение примет вид: $9y+\frac{4\cdot 5^4}{y}=13\cdot 5^2$ или $9y^2-13\cdot 5^2y+4\cdot 5^4=0$;

$y_{1,2} = \frac{13 \cdot 5^2 \pm \sqrt{169 \cdot 5^4 - 144 \cdot 5^4}}{18} = \frac{13 \cdot 5^2 \pm 5^2 \cdot 5}{18}$; $y_1 = \frac{5^2(13-5)}{18} = \frac{5^2 \cdot 8}{18} = \frac{5^2 \cdot 4}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$; $y_2 = \frac{5^2(13+5)}{18} = 5^2$.

а) $5^{2x-4} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$, или $5^{x-2} = \frac{10}{3}$ (корень арифметический), откуда $(x-2)\lg 5 = 1 - \lg 3$; $x\lg 5 = 2\lg 5 - \lg 3 + 1$; $x_1 = 2 + \frac{1-\lg 3}{\lg 5}$.

б) $5^{2x-4} = 5^2$; $2x - 4 = 2$; $x_2 = 3$.

- Уравнение вида $A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0$.

1) Решить уравнение $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$.

Решение: $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$;

$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$; $2y^2 - 5y + 3 = 0$; $y_1 = 1$; $y_2 = \frac{3}{2}$.

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; $x_1 = 0$.

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $x_2 = -1$.

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств $a^x > a^b$ или $a^x < a^b$. Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Рассмотрим несколько примеров:

1) Решить неравенство $3^x < 81$.

Решение: Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$. Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства $3^x < 81$ являются числа $x < 4$.

2) Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

Решение: Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$. Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

3) Решить неравенство $3^{x^2} < 9$.

Решение: Запишем неравенство в виде $3^{x^2-x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, откуда $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$.

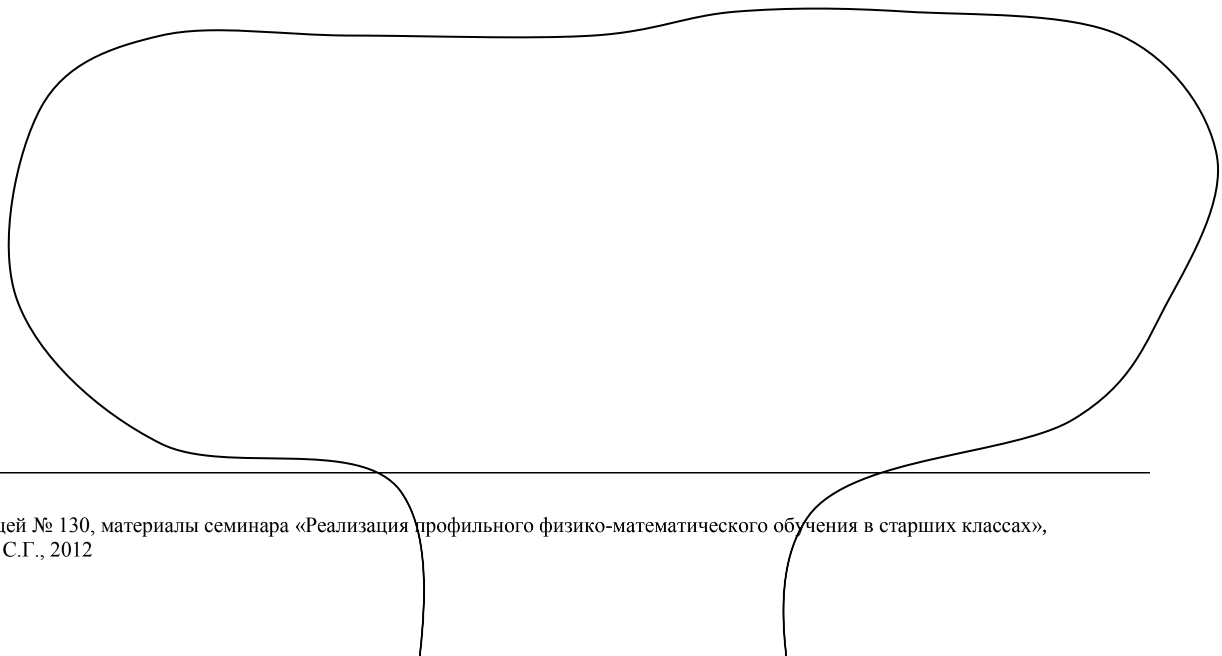
4) Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$

Решение: Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства $4^x < -2$, $4^x > 1$. Первое неравенство не имеет решений, так как $4^x > 0$ при всех $x \epsilon R$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

4. Блок обобщения.

Дидактическая цель: Получить обобщенное представление о предстоящем объеме и структуре изучения проблемного модуля «Показательные уравнения и неравенства»; осознать объем «урожая», который предстоит собрать с «древа» проблемного модуля «Показательные уравнения и неравенства»

«Древо» данного проблемного модуля уходит «корнями» в такие фундаментальные понятия алгебры, как уравнения и неравенства.



$a^{f(x)} = 1$

$a^x = a^\alpha$

$A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0$

$a^x = b$.

$A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0$

Определение уравнения и неравенства

Понятие уравнения и неравенства

5. Теоретический блок.

Дидактическая цель: Определить показательную функцию с основанием а, и свойства показательной функции. Рассмотреть основные методы решения простейших показательных уравнений и неравенств.

Показательная функция.

Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где $a>0$, $a\neq1$), называется показательной функцией с основанием а.

Сформулируем основные свойства показательной функции:

Область определения – множество R действительных чисел.

1. Область значений – множество R_+ всех положительных действительных чисел.

2. При $a>1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0<a<1$ функция убывает на множестве R.

3. При любых действительных значениях х и у справедливы равенства

$$a^x a^y = a^{x+y};\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$(ab)^x = a^x b^x$; $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$.

Эти формулы называют основными свойствами степеней.

Решение показательных уравнений и неравенств.

1 Уравнения. Рассмотрим простейшее показательное уравнение $a^x=b$, где $a>0$ и $a\neq1$. Область значений функции $y=a^x$ – множество положительных чисел. Поэтому в случае $b<0$ или $b=0$ уравнение не имеет решений.

Пусть $b>0$. Функция $y=a^x$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ возрастает при $a>1$ (убывает при $0<a<1$) и принимает все положительные значения. Применяя теорему о корне (пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I), получаем , что уравнение при любом положительном a, отличном от 1, и $b>0$ имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$. Очевидно, что c является решением уравнения $a^x = a^c$.

- Уравнения вида $a^{f(x)} = 1$.

На основании определения нулевого показателя степени решением уравнения вида $a^{f(x)} = 1$ будет: $f(x) = 0$. Очевидно и обратное.

Пример: $7^{2Sinx+\sqrt{3}} = 1$

Решение: $2sinx + \sqrt{3} = 0$; $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi$; $n = 0$; ±1; ±2; …

- Уравнение вида $a^x = a^\alpha$.

Левая и правая части уравнения $a^x = a^\alpha$ приведены к одному основанию. В этом случае решением будет $x = \alpha$. Действительно, разделив уравнение $a^x = a^\alpha$ на a^α, где $a^\alpha \neq 0$, получим: $\frac{a^x}{a^\alpha} = 1$, или $a^{x-\alpha} = 1$, откуда следует, что $x - \alpha = 0$; $x = \alpha$.

Очевидно, что уравнение $a^{f(x)} = a^{\alpha}$ равносильно уравнению $f(x) = \alpha$ и обратно.

Итак, если степени равны, то при равных основаниях в области действительных чисел показатели степеней также равны между собой.

Пример: $[0{,}1(6)]^{x-16} \cdot 0{,}25 = 54$

Решение: $0{,}1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-16} \cdot \frac{1}{4} = 6 \cdot 9$; $16^{16-x} = 6 \cdot 36$; $6^{16-x} = 6^3$; $16 - x = 3$; $x = 13$.

- Уравнения вида $a^x = b$.

Левая и правая части уравнения вида $a^x = b$ не приводятся к одному основанию, причем $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$.

Из равенства положительных чисел следует равенство их логарифмов, т. е. $x lg a = lg b$, причем уравнения равносильны: если числа равны, то равны и их логарифмы, и, наоборот, если логарифмы при одном и том же основании равны, то равны и логарифмы числа.

Из $x lg a = lg b$ следует, что $x = \frac{lg b}{lg a}$.

Пример: $2^{3x-2} = 5^{x-\frac{2}{3}}$

Решение: $2^{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} = 5^{x-\frac{2}{3}}$; $8^{x-\frac{2}{3}} = 5^{x-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{8}{5}\right)^{x-\frac{2}{3}} = 1$, откуда $x = \frac{2}{3}$.

- Уравнение вида $A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + A_2 a^{mx+k_2} + \dots + A_n a^{mx+k_n} = M$.

Характерной особенностью уравнения вида: $A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + A_2 a^{mx+k_2} + \dots + A_n a^{mx+k_n} = M$. Где $M, A_0, A_1, \dots, A_n, a, m$ и $k_0 k_1, \dots, k_n$ - постоянные величины, является наличие одного и того же коэффициента перед х.

Для решения этого уравнения вынесем за скобки общий множитель a^{mx+k_i}, где k_i - наименьшее из чисел $k_0; k_1; k_2; \dots; k_n$. После этого уравнение примет вид: $a^{mx+k_i}(A_0 a^{k_0-k_i} + A_1 a^{k_1-k_i} + A_2 a^{k_2-k_i} + \dots + A_n a^{k_n-k_i}) = M$. Выражение, стоящее в скобках уравнения, является постоянной величиной;

обозначим эту величину буквой N, тогда уравнение примет вид: $a^{mx+k_i} \cdot N = M$, откуда имеем при $N \neq 0$: $a^{mx+k_i} = \frac{M}{N}$.

Пример: $4^{2x} - 3^{2x-\frac{1}{2}} = 3^{2x-\frac{1}{2}} - 2^{4x-1}$

Решение: $2^{4x} + 2^{4x-1} = 3^{2x+\frac{1}{2}} + 3^{2x-\frac{1}{2}}$; $2^{4x-1}(2+1) = 3^{2x-\frac{1}{2}}(3+1)$; $2^{4x-1} \cdot 3 = 3^{2x-\frac{1}{2}} \cdot 2^2$; $2^{4x-3} = 3^{2x-\frac{3}{2}}$; $4^{2x-\frac{3}{2}} = 3^{2x-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-\frac{3}{2}} = 1$; $2x - \frac{3}{2} = 0$; $x = \frac{3}{4}$.

- Уравнение вида $A_0a^{2x} + A_1a^x + A_2 = 0$

Уравнение вида $A_0a^{2x} + A_1a^x + A_2 = 0$ часто называют трехчленными показательными уравнениями. Уравнение с помощью подстановки $a^x = y$ обращается в обычное квадратное уравнение: $A_0y^2 + A_1y + A_2 = 0$. Решив последнее, найдем корни y_1 и y_2.

После этого решения уравнения сводится к решению следующих двух уравнений: 1) $a^x = y_1$ и 2) $a^x = y_2$. Если одновременно $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0$, то уравнение не имеет решений.

Пример: $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$

Решение: $3 \cdot 3^{2x} - 29 \cdot 3^x + 18 = 0$; $3^x = y$; $3y^2 - 29y + 18$=0, корни этого уравнения будут: $y_1 = \frac{2}{3}$ и $y_2 = 9$.

а) $3^x = \frac{2}{3}$; $xlg3 = lg2 - lg3$; $x_1 = \frac{lg2}{lg3} - 1$.

б) $3^x = 9$; $x_2 = 2$.

- Уравнение вида $A_0a^x + A_1a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}} + A_2b^x = 0$.

Все члены уравнения вида $A_0a^x + A_1a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}} + A_2b^x = 0$ содержат разные основания, но в произведение основания входят в степенях с показателями степеней вдвое меньшими, чем показатели степеней при a и b.

Уравнение $A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0$. легко приводится к уравнению $A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0$. Действительно, разделив уравнение на $b^x \neq 0$, получим: $A_0 \left(\frac{a}{b}\right)^x + A_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0$.

Уравнение совпадает с уравнением $A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0$ и сводится к квадратному уравнению. Пусть $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y$, тогда уравнение примет вид: $A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0$. Решив это уравнение, найдем y_1 и y_2. После чего будем иметь: а) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_1$ и б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_2$.

Если $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0$ одновременно, то уравнение не имеет решения.

2 Неравенства и системы уравнений. Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве функции $y=a^x$: эта функция возрастает при a>1 и убывает при 0<a<1.

Пример: Решим неравенство $0{,}5^{7-3x} < 4$.

Решение: Пользуясь тем, что $0{,}5^{-2} = 4$, перепишем заданное неравенство в виде $0{,}5^{7-3x} < 0{,}5^{-2}$. Показательная функция $y = x^{0,5}$ убывает (основание 0,5 меньше 1). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $7 - 3x > -2$, откуда $x < 3$. Ответ: $(-\infty; 3)$.

2. Блок ошибок.

Дидактическая цель: Прокомментировать типичные ошибки, возникающие при решении задач; знать причины и способы их исправления; владеть приемами самоконтроля при решении задач.

1) При решении показательных уравнений и неравенств учащиеся путаю свойства степени

Например: в уравнении $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$ они полагают, что $\sqrt{(2 \cdot 3)^{x+x}} = 6^2$ Верно будет $\sqrt{(2 \cdot 3)^x} = 6^2$.

2) При решении неравенств возникают ошибки в знаках

Например: в уравнении $0{,}5^{5x} < 4$ они полагают, что $5x < -2$. Верно будет $5x > -2$ (т.к. $y = 0{,}5^x$ убывает).

6. Блок применения.

Дидактическая цель: Показать алгоритм применения материала из теоретического блока на практике, умение решать различные задачи.

Основные типы задач.

- Решить уравнение $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$

Решение: $(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3}$, $10^{x^2-3} = 10^{3x-5}$, $x^2 - 3 = 3x - 5$

Ответ: $x = 1$ или $x = 2$.

Упражнения

1) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x = 128$

2) $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x} = 1$

3) $0{,}5^{x^2-9x+17{,}5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

4) $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[4]{9^{3x-1}} = 27^{-\frac{2}{3}}$

- Решить уравнение $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-1}$

Решение: $3^{x-2}(2 \cdot 3 - 1) = 5^{x-3}(5+4)$, $5 \cdot 3^{x-2} = 5^{x-3} \cdot 3^2$, $3^{x-4} = 5^{x-4}$, $\frac{3^{x-4}}{5^{x-4}} = 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^0$.

Ответ: $x = 4$.

Упражнения

3) $3^{x+2} - 3^x = 27$

4) $2^x - 2^{x-4} = 15$

5) $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$

6) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 3159$

- Решить уравнение $8^x - 4^{x+0{,}5} - 2^x + 2 = 0$

Решение: $2^{3x} - 2^{2x+1} - 2^x + 2 = 0$, $2^{3x} - 2 \cdot 2^{2x} - 2^x + 2 = 0$. Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда

$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$, $t^2(t-2) - (t-2) = 0$

$(t-2)(t-1)(t+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$\left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=1 \end{array}\right.$

Ответ: $x=1$ или $x=0$.

Упражнения

1) $4^{\frac{2}{x}}-5\cdot 4^{\frac{1}{x}}+4=0$

2) $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$

3) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$

4) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

- Решить уравнение $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24$

Решение: Имеем: $5\cdot 5^{x^2}-\frac{5}{5^{x^2}}=24$. Пусть $5^{x^2}=t$. Тогда

$$5t-\frac{5}{t}=24$$

Отсюда $5t^2-24t-5=0$, $t=5$ или $t=-\frac{1}{5}$. Следовательно, исходное уравнение равносильно такому: $5^{x^2}=5$

Ответ: $x=1$ или $x=-1$.

Уравнение

1) $5^x-24=\frac{25}{5^x}$

2) $2^{2+x}-2^{2-x}=15$

3) $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$

4) $2^x+8\cdot 2^{-x}=16{,}5$

- Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$

Решение: Данное неравенство равносильно такому:

$\sqrt{x+4}<\sqrt{x^2+3x+4}$.

Отсюда

$$\begin{cases} x+4 < x^2+3x+4, \\ x+4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2+2x > 0, \\ x \geq -4; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 0, \end{array}\right. \\ x \geq -4. \end{cases}$$

Ответ: [-4; -2) $\cup$ $(0;\infty)$.

Упражнения

1) $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$

2) $16^x > 0{,}125$

3) $(0{,}3)^{\frac{x}{x-2}} < (0{,}3)^{\frac{6}{x-1}}$

4) $6^{\frac{x+5}{x^2-9}} > 1$

7. Блок углубления.

Дидактическая цель: Уметь находить производную показательной функции.

Теорема 1. Функция e^x дифференцируема в каждой точке области определения, и $(e^x)^/ = e^x$.

Пример: Найдем производную функции $y = e^{5x}$

Решение: $(e^{5x})^/ = e^{5x} \cdot (5x)^/ = 5e^{5x}$.

Определение. Натуральным логарифмом (обозначается ln) называется логарифм по основанию e: $lnx = log_e x$.

Теорема 2. Показательная функция y=a^x дифференцируема в каждой точке области определения, и $(a^x)^/ = a^x lna$.

Пример: Найдем производные функций $y = 2^x$ и $y = 5^{-3x}$.

Решение: $(2^x)^/ = 2^x ln2$; $(5^{-3x})^/ = (-3) \cdot 5^{-3x} ln5$.

Теорема 3. Первообразной для функции y=a^x на R является функция y=$\frac{a^x}{lna}$.

Пример: Найдите первообразные для функций:

а) $f(x) = 5^x$

б) $g(x) = 4 \cdot 2^x$

в) $h(x) = 4e^{3x} - 10 \cdot 0{,}6^x$

Решение:

а) $F(x) = \frac{5^x}{ln5} + C$

б) $G(x) = \frac{4 \cdot 2^x}{ln2} + C$

в) $H(x) = \frac{4}{3}e^{3x} - 10 \cdot \frac{0{,}6^x}{ln0{,}6} + C.$